Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów gimnazjów. Etap Wojewódzki

15 lutego 2019

Czas 90 minut

Rozwiązania i punktacja

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 10. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi jedną poprawną odpowiedź. W przypadku pomyłki na karcie odpowiedzi należy wypełnić następny diagram z odpowiedziami. Diagramy z niepoprawnymi odpowiedziami powinny zostać przekreślone wzdłuż przekątnych. Zaznaczenie więcej niż jednej odpowiedzi w jednym zadaniu jest równoznaczne z niepoprawną odpowiedzią.

Zadanie 1. (*1 punkt*) Liczba $(111111111)^2$ jest równa:

A 11111111111111111

B $\boxed{12345678987654321}$

C 1234567890987654321

D 12345678900987654321

E 112233445566778890

Zadanie 2. (*1 punkt*) Dwie proste przecinające się wyznaczyły cztery kąty. Różnica pewnych dwóch z tych kątów jest równa 68^o. Miara jednego z tych kątów wynosi:

A $\boxed{56^o}$ **B** 60^o **C** 22^o **D** 36^o **E** 44^o

Zadanie 3. (*1 punkt*) Ile boków ma podstawa ostrosłupa, którego suma liczby ścian i liczby wierzchołków wynosi 16?

A 6 **B** $\boxed{7}$ **C** 10 **D** 12 **E** 16

Zadanie 4. (*1 punkt*) W pewnej miejscowości 3-cyfrowe numery utworzone z cyfr 1,2,3,4,5 wyczerpują wszystkie możliwości. Aby zainstalować nowe telefony, 3 -cyfrowe numery utworzono z cyfr 1,2,3,4,5,6. Ile nowych telefonów można zainstalować w tej miejscowości?

A 100 **D** 50 **B** $\boxed{91}$ **E** 486 **C** 64

Zadanie 5. (*1 punkt*) Ile jest liczb trzycyfrowych, które są kwadratami liczb naturalnych?

A 18 **B** 19 **C** 20 **D** 21 **E** $\boxed{22}$

Zadanie 6. (*1 punkt*) Spośród liter MATEMATYKA losujemy jedną literę. Które z prawdopodobieństw jest największe?

A prawdopodobieństwo wylosowania samogłoski

B prawdopodobieństwo wylosowania spółgłoski

C $\boxed{\text{prawdopodobieństwo wylosowania litery mającej oś symetrii}}$

D prawdopodobieństwo wylosowania litery Z

E prawdopodobieństwo wylosowania litery A

Zadanie 7. (*1 punkt*) W czworościanie foremnym o krawędzi 8 przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek czworościanu poprowadzono płaszczyznę. Pole otrzymanego przekroju wynosi:

A $24\sqrt{2}$ **B** $\boxed{4\sqrt{11}}$ **C** $12\sqrt{3}$ **D** 18 **E** $12\sqrt{5}$

Zadanie 8. (*1 punkt*) Która z poniższych liczb nie jest liczbą wymierną?

A $\sqrt{2^{2019} - 4^{1009}}$

B Promień kuli o objętości $\frac{32}{81}\pi$

C $\boxed{\text{bok sześcianu o powierzchni całkowitej 36}}$

D $\frac{6\pi-4}{2\pi-\frac{4}{3}}$

E pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o najdłuższm boku $\sqrt{8}$

Zadanie 9. (*1 punkt*) Środki dwóch przeciwległych boków sześciokąta foremnego połączono odcinkami z wierzchołami tego sześciokąta, z którymi nie mają punktów wspólnych. Ile wynosi pole tego czworokąta, jeżeli długość boku sześciokąta wynosi 6 cm?

A $\boxed{36\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$ **B** $18\sqrt{2}\ \text{cm}^2$ **C** $42\ \text{cm}^2$ **D** $24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **E** $36\ \text{cm}^2$

Zadanie 10. (*1 punkt*) Dziadek z Małgosią pojechali do Warszawy pociągiem. Dziadek za bilety zapłacił 66 zł 50 gr, przy czym dziadek miał 30% ulgi, natomiast Małgosia miała 37% ulgi. Jaka jest cena biletu normalnego (bez zniżek) do Warszawy?

A 60 zł **B** 64zł 50 gr **C** 55 zł 20 gr **D** $\boxed{\text{50 zł}}$ **E** 45 zł

ZADANIA OTWARTE

W zadaniach 11,12,13,15 za błędy rachunkowe nieistotne dla sposobu rozwiązywania zadania punkty nie były odejmowane

Zadanie 11. (*4 punkty*) Zbiornik napełniany jest przez dwa krany. Jeżeli kran A odkręcimy o godzinie 8:00, a kran B o godzinie 10:00 to zbiornik zostanie napełniony o godz 16:00. Jeżeli kran B odkręcimy o godzinie 8:00, a kran A o godzinie 12:00 to zbiornik zostanie napełniony o godzinie 15:00. O której godzinie zostanie napełniony zbiornik, jeżeli oba krany otworzymy jednocześnie o godzinie 8:00?

Rozwiązanie

x - część zbiornika napełniona przez kran A w ciągu godziny
y - część zbiornika napełniona przez kran B w ciągu godziny

W pierwszym przypadku kran A był odkręcony przez 8 godzin, natomiast kran B przez 6 godzin. W drugim przypadku kran A był odkręcony przez 3 godziny, natomiast kran B przez 7 godzin. Otrzymujemy następujące równania dla każdego z przypadków:

$$8x + 6y = 1$$

dla pierwszego przypadku oraz

$$3x + 7y = 1$$

dla drugiego przypadku.
Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 1 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases}$$

otrzymujemy :

$$x = \frac{1}{38} \qquad y = \frac{5}{38}$$

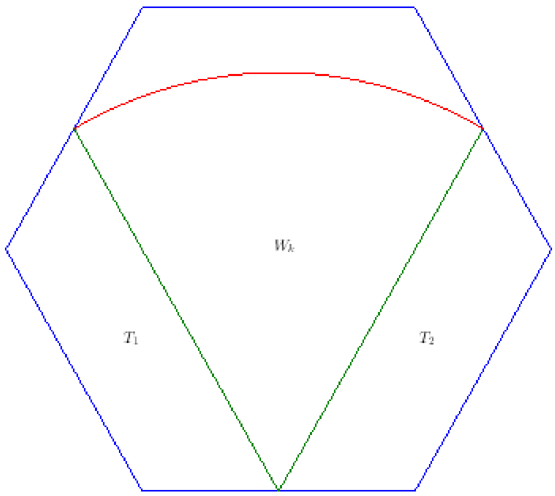
Obydwa krany zapełnią w ciągu godziny $\frac{6}{38}$ zbiornika. Aby napełnić cały zbiornik krany powinny być odkręcone przez $\frac{38}{6}$ godzin co jest równe 6 godzin i 20 minut.
Zbiornik zostanie napełniony o godzinie **14:20**

Punktacja

- utworzenie poprawnego układu równań ze zmiennymi opisującymi wydajność kranów, lub czas napełnienia zbiornika przez każdy z kranów *2 punkty*
- rozwiązanie układu równań *1 punkt*
- wyznaczenie czasu napełnienia zbiornika przez dwa krany *1 punkt*

Zadanie 12. (*4 punkty*) Ogrodzona łąka ma kształt sześciokąta foremnego o boku długości 12 m. Do środka jednego z boków ogrodzenia przywiązana jest koza na łańcuchu o długości 18 m. Koza zjadła dostępną trawę w ciągu 105 dni. Na ile całych dni pozostało trawy dla kozy na pozostałej części łąki? Przyjmij w tym zadaniu $\pi = 3$ i $\sqrt{3} = 1,7$.

Rozwiązanie



Część łąki dostęona dla kozy na łańcuchu składa się z dwóch trapezów T_1 i T_2 oraz wycinka koła W_k o kącie 60^o i promieniu 18m. Pole tej części jest równe sumie pól trapezów o podstawach a=18m i b=12m oraz wysokości h=$3\sqrt{3}$m oraz wycnka koła.

$$P = 2 \cdot \frac{18+12}{2} \cdot 3\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi \cdot 18^2 = 153 + 162 = 315\text{m}^2$$

Dziennie koza zjada :

$$\frac{315}{105} = 3\text{m}^2$$

trawy

Cała łąka ma powierzchnię

$$P_c = 6 \cdot \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 367,2\,\text{m}^2$$

Część łąki z na której pozostała trawa po odczepieniu kozy z łańcucha ma pole:

$$367,2 - 315 = 52,2\,\text{m}^2$$

Kozie wystarczy trawy na :

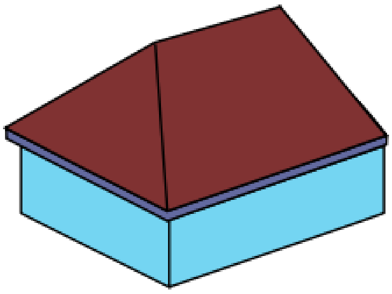
$$\frac{52,2}{3} = 17,4$$

dni czyli na 17 całych dni.

Punktacja

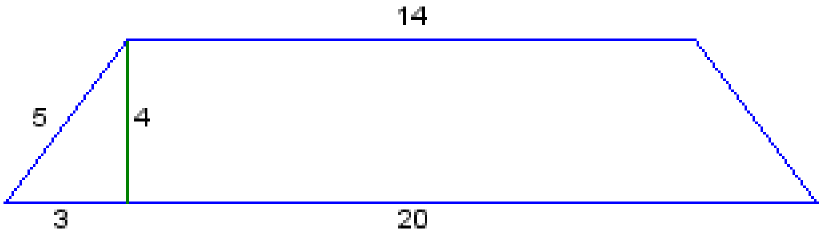
- poprawny rysunek (łańcuch wychodzący ze środka boku i dochodzący do środka innego-boku) *1 punkt*

- wyznaczenie pola dostępnego dla kozy *1 punkt*
- wyznaczenie dziennej porcji trawy *1 punkt*
- wyznaczenie całkowitej liczby dni *1 punkt*



Zadanie 13. (*4 punkty*) Czterospadowy dach składa się z dwóch trójkątów równobocznych o boku 5m i dwóch trapezów o podstawach 20m i 14m. Ile prostokątnych arkuszy blachy o wymiarach 2m na 4m należy zakupić, aby wystarczyły na pokrycie dachu?

Rozwiązanie



Dach składa się z dwóch trójkątów równobocznych o boku 5m i dwóch trapezów równoramiennych o podstawach dolnej 20m i górnej 14m. Ramiona trapezów mają długość taką samą jak bok trójkąta, czyli 5m. Wysokość trapezu wynosi 4m (rysunek). Pole powierzchni dachu jest równe:

$$P_D = 2 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{(20+14) \cdot 4}{2} = 21,625 + 136 = 157,625\,\mathrm{m}^2$$

Powierzchnia arkusz blachy wynosi:

$$P_B = 4 \cdot 2 = 8\,\mathrm{m}^2$$

Należy więc zakupić

$$\frac{157,625}{8} = 19,6...$$

czyli 20 arkuszy blachy.

Punktacja

- obliczenie wysokości trapezu *1 punkt*
- obliczenie pola powierzchni dachu *2 punkty*
- wyznaczenie liczby arkuszy blachy *1 punkt*

Zadanie 14. (*4 punkty*) Średnia ocen 16 dziewcząt z klasy III wynosi 4,5, a średnia ocen 14 chłopców z tej kasy wynosi 4,2. Jaka jest średnia ocen całej klasy?

Rozwiązanie

Suma wszystkich ocen dziewcząt w klasie wynosi

$$16 \cdot 4,5 = 72$$

Suma wszystkich ocen chłopców w klasie wynosi

$$14 \cdot 4,2 = 58,8$$

Suma wszystkich ocen w klasie wynosi

$$72 + 58,8 = 130,8$$

Średnia wszystkich ocen w klasie wynosi

$$\frac{130,8}{30} = 4,36$$

Punktacja

- Obliczenie sumy ocen ocen chłopców i dziewcząt *2 punkty*
- rozwiązanie obliczenie liczby dzieci w klasie *1 punkt*
- obliczenie średniej klasowej *1 punkt*

Zadanie 15. (*4 punkty*) Wyznacz wszystkie liczby dwucyfrowe takie, że różnica tej liczby i liczby powstałej przez zamianę cyfr jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Liczbę dwucyfrową przedstawiam jako

$$10 \cdot x + y$$

przy czym x i y są cyframi oraz $x > 0$
Liczba z zamienioną kolejnością cyfr jest równa

$$10 \cdot y + x$$

obliczając różnicę liczb otrzymujemy:

$$10 \cdot x + y - (10 \cdot y + x) = 9x - 9y = 9(x - y)$$

Liczba 9 jest kwadratem liczby całkowitej, więc aby powyższa liczba była kwadratem liczby całkowitej, to liczba

$$x - y$$

też musi być kwadratem liczby całkowitej. Rozpatrujemy wszystkie możliwe przypadki gdzie liczba $x - y$ jest kwadratem liczby całkowitej i x oraz$y$ są liczbami jednocyfrowymi.

Przypadek 1^o
$x - y = 0$
Rozwiązaniami wówczas są liczby:

$$11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$$

Przypadek 2^o
$x - y = 1$
Rozwiązaniami wówczas są liczby:

$$10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$$

Przypadek 3^o
$x - y = 4$
Rozwiązaniami wówczas są liczby:

$$40, 51, 62, 73, 84, 95$$

Przypadek 4^o
$x - y = 9$
Rozwiązaniami wówczas są liczby:

$$90$$

Punktacja

- wyznaczenie różnicy liczby i liczby przestawionej $9(x - y)$ *1 punkt*
- wyznaczenie liczb spełniających warunki zadania *od 1 do 3 punktów*

Jeżeli uczeń nie zauważył przypadku 1^o punkty nie były odejmowane.