Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów gimnazjów. Etap Wojewódzki

16 lutego 2018

Czas 90 minut

Rozwiązania i punktacja

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (*1 punkt*) Odległość między miastami A i B na mapie wynosi 4 cm. Jaka jest rzeczywista odległość między tymi miastami jeżeli skala mapy jest 1:1500000?

A 600 km **B** 12 km **C** 40 km **D** 150 km **E** $\boxed{60 \text{ km}}$

Zadanie 2. (*1 punkt*) W okrąg wpisano trójkąt ABC, którego kąt przy wierzchołku A wynosi 50^o, kąt przy wierzchołku B wynosi 70^o. Jaką część tego okręgu stanowi łuk $\widetilde{AB}$ zawierający punkt C?

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** $\boxed{\frac{2}{3}}$ **E** $\frac{2}{5}$

Zadanie 3. Mamy do dyspozycji 200 płytek o wymiarach 25 cm na 30 cm. Jaka będzie największa powierzchnia kwadratowego placu, który można wyłożyć przy pomocy tych płytek, nie tnąc ich?

A $\boxed{9 \text{ m}^2}$ **B** $2,25 \text{ m}^2$ **C** 12 m^2 **D** 15 m^2 **E** $14,4 \text{ m}^2$

Zadanie 4. (*1 punkt*) W rombie jedną przekątną skrócono o 20%, a drugą wydłużono o 20%. Jak zmieniło się pole tego rombu?

A zwiększyło się o 4% **B** zmniejszyło się o 8% **C** pozostało bez zmian

D $\boxed{\text{zmniejszyło się o 4\%}}$ **E** zwiększyło się o 2%

Zadanie 5. (*1 punkt*) W sześciokąt foremny o boku 6 cm wpisano okrąg, a następnie w ten okrąg wpisano pięciokąt foremny w ten sposób, że jeden z boków pięciokąta jest równoległy do boku sześciokąta. Ta figura posiada:

A środek symetrii

B nieskończoną ilość osi symetrii

C jedną oś symetrii i środek symetrii

D sześć osi symetrii

E $\boxed{\text{jedną oś symetrii i nie posiada środka symetrii}}$

Zadanie 6. (*1 punkt*) W skarbonce były monety 5-groszowe, 10-groszowe i 20-groszowe. Razem 64 monety o łącznej wartości 10 zł. Ile było monet 20-groszowych, jeżeli wiadomo, że monet 5-groszowych było 2 razy mniej niż 10-groszowych?

A 20 **B** 30 **C** $\boxed{40}$ **D** 50 **E** 60

Zadanie 7. (*1 punkt*) Marek poszedł na wycieczkę w góry. Pierwszą część trasy (pod górkę) pokonał w 3 godziny idąc ze średnią prędkością 3 km/h, na górze odpoczął przez godzinę w schronisku, a następnie wrócił tą samą drogą, idąc ze średnią prędkością 4,5 km/h. Jaka była średnia prędkość Marka w czasie całej wycieczki ?

A $\boxed{\text{3 km/h}}$ **B** 3,75 km/h **C** 7,5 km/h **D** 4 km/h **E** 2 km/h

Zadanie 8. (*1 punkt*) Jaka jest cyfra jedności liczby $5^{12} + 10^{15} + 9^{11}$?

A 0 **B** 3 **C** $\boxed{4}$ **D** 5 **E** 7

Zadanie 9. (*1 punkt*) Naczynie w kształcie stożka o średnicy podstawy 2 dm i wysokości 18 cm jest całkowicie napełnione płynem. Płyn przelano do naczynia w kształcie walca, którego podstawa ma średnicę 1 dm. Jaka jest wysokość płynu w drugim naczyniu?

A 18 cm **B** $\boxed{\text{24 cm}}$ **C** 6 cm **D** 2 dm **E** 2 dm

Zadanie 10. (*1 punkt*) Symbol $n!$ (czytaj: n silnia) oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n tzn. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (np. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$). Która z poniższych liczb nie jest liczbą całkowitą?

A $\frac{20!}{2^8}$ **B** $\frac{20!}{3^7}$ **C** $\frac{20!}{4^6}$ **D** $\boxed{\frac{20!}{5^5}}$ **E** $\frac{20!}{6^4}$

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 11. (*4 punkty*) Znajdź liczbę dwucyfrową, która jest równa potrojonemu iloczynowi swoich cyfr.

Schemat punktacji

1. Uczeń znalazł jedną z liczb, 15 lub 24 bez żadnych uzasadnień, rachunków itp – *1 punkt.*
1a. Uczeń dochodzi do zależności, że $3xy = 10x + y$ gdzie x jest jedną z cyfr $1, 2, ..., 9$ a y jedną z cyfr $0, 1, 2, ..., 9$
– *1 punkt*

2. Uczeń znalazł dwie liczby, ale brakuje jakichkolwiek uzasadnień, rachunków – *2 punkty*
2a. Uczeń znalazł jedną z liczb, 15 lub 24 widoczne są na karcie odpowiedzi rachunki uzasadniające jego to myślenia, typu dochodzi do zależności, że 3xy=10x+y dla x, y i oblicza prawdziwość dla konkretnej podanej liczby – *2 punkty*
3. Uczeń znalazł obie liczby z uzasadnieniem, tzn. rachunkami lub przeprowadził rachunki np. w tabelce – *4 punkty*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y = \frac{10x}{3x-1}$	5	4	X	X	X	X	X	X	X

3a. Uczeń znalazł obie liczby z uzasadnieniem, tzn. rachunkami lub przeprowadził rachunki np. w tabelce, ale popełnił błędy rachunkowe lub przeprowadził uzasadnienie, ale nie zauważył i nie podał w rozwiązaniu drugiej liczby – *3 punkty*

Zadanie 12. (*4 punkty*) Gosia, Julia i Marek mają pomalować płot. Gosia z Julią potrafią pomalować płot w ciągu 15 dni malując 6 godzin dziennie. Gosia z Markiem potrafią pomalować płot w ciągu 15 dni malując po 8 godzin dziennie, Marek z Julią potrafią pomalować płot w ciągu 30 dni malując po 5 godzin dziennie. Ile dni zajmie pomalowanie plotu, jeżeli będą pracować we trójkę po 5 godzin dziennie?

Schemat punktacji

1. Uczeń zapisał układ trzech równań w postaci

$$\begin{cases} x+y=90 \\ x+z=120 \\ y+z=150 \end{cases}$$

– *1 punkt.*

2. Uczeń zapisał układ trzech równań w postaci

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{90} \\ x+z=\frac{1}{120} \\ y+z=\frac{1}{150} \end{cases}$$

– *2 punkty.*

3. Uczeń zapisał układ trzech równań w postaci

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{90} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{150} \end{cases}$$

– *3 punkty.*

4. Uczeń zsumował równania z punktu 2 lub 3 i poprawnie zinterpretował otrzymany wynik

$$2x+2y+2z=\frac{1}{90}+\frac{1}{120}+\frac{1}{150}=\frac{47}{1800}$$

$$x+y+z=\frac{47}{3600}$$

analogicznie dla punktu 3

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{47}{3600}$$

czas pracy w godzinach wynosi

$$\frac{3600}{47}=76,6$$

czas pracy w dniach (po 5 godzin dziennie)

$$\frac{76,6}{5}=15,3$$

– *4 punkty.*

Obliczenie wydajności godzinowej każdego z „malarzy” oraz obliczenie czasu potrzebnego do całkowitego pomalowania płotu – *4 punkty.*

Zadanie 13. (*4 punkty*) Sprzedawca ma do dyspozycji 75 puszek z sokiem malinowym. Buduje z nich dekorację w postaci regularnej piramidy o jak największej wysokości, w następujący sposób: buduje z puszek pełen kwadrat, a na nim kolejny, również pełny, którego bok jest o jedną puszkę krótszy, itd. Jaką największą wysokość może mieć piramida, jeśli jedna puszka ma 15 cm wysokości? Ile musiałby jeszcze dołożyć puszek, gdyby chciał zbudować piramidę o jeden rząd wyższą?

Schemat punktacji

!. Uczeń zauważył, że liczba puszek jest sumą kwadratów kolejnych liczb rzeczywistych – *1 punkt.*

2. Uczeń obliczył największą sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych (55) , która jest mniejsza niż 75 – *2 punkty.*

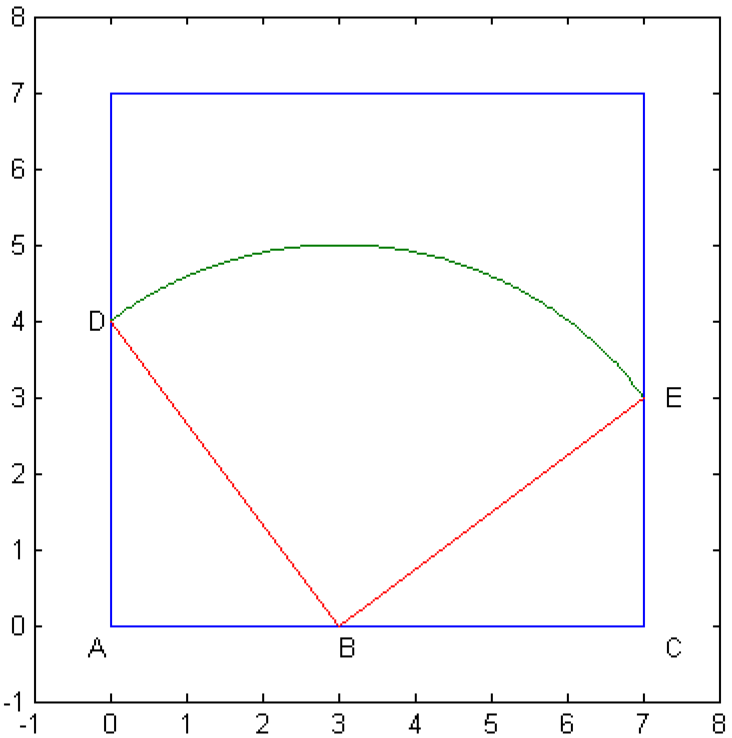
3. Uczeń obliczył poprawnie wysokość piramidy $5 \cdot 15$ cm= 75 cm – *3 punkty.*

4. Uczeń wyznaczył poprawnie liczbę puszek $55 + 36 = 91$ potrzebną do zbudowania piramidy większej o jeden kwadrat oraz oblicza liczbę brakujących puszek $91 - 75 = 16$ – *4 punkty.*

kod ucznia	

Zadanie 14. (*4 punkty*) Ogrodzona łąka ma kształt kwadratu o boku 70 m. Do wewnętrznej strony ogrodzenia przywiązana jest koza w odległości 40 m od narożnika łąki. Długość łańcucha wynosi 50 m. Koza zjadła dostępną trawę w ciągu 10 dni, w związku z czym gospodarz odwiązał kozę. Na ile całych dni wystarczy trawy na pozostałej części łąki?
Wykonaj rysunek w skali 1:1000. Przyjmij, że bok pojedynczej kratki ma długość 5 mm.

Schemat punktacji



1. Poprawne wykonanie rysunku – *1 punkt.*

2. Zauważenie , ze trójkąty ABD i i BCE są przystające oraz stwierdzenie że kąt DBE jest kątem prostym – *2 punkty.*

3. Obliczenie pola łąki w zasięgu kozy

$$P = \frac{1}{4}\pi \cdot 50^2 + \frac{2 \cdot 30 \cdot 40}{2} = 3162,5\text{m}^2$$

wraz z dwoma poprzednimi punktami – *3 punkty.*

4. Obliczenie dziennej porcji trawy kozy

$$\frac{3162,5}{10} = 316,25$$

pozostałej części łąki

$$70^2 - 3162,5 = 4900 - 3162,5 = 1737,5\text{m}^2$$

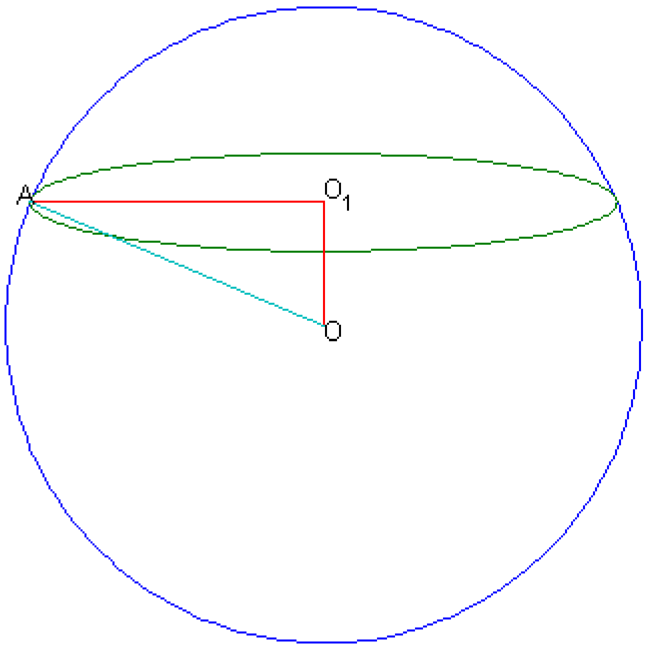
oraz liczby całkowitych dni na które wystarczy kozie trawy

$$\frac{1737,5}{316,25} = 5,56$$

Odpowiedź: Całkowita liczba dni wynosi 5.
wraz z poprzednimi punktami – *4 punkty*.

Zadanie 15. (*4 punkty*) Płaszczyzna przecinająca kulę jest oddalona od jej środka o 10 cm, a przekrój kuli tą płaszczyzną ma pole $576 \cdot \pi$ cm^2. Oblicz promień kuli.

Schemat punktacji



1. Wykonanie rysunku – *1 punkt*.

2. Obliczenie promienia koła będącego przekrojem – *2 punkty*.

$$|O_1A| = \sqrt{\frac{576 \cdot \pi}{\pi}} = 24\text{cm}$$

3. Zauważenie, że trójkąt OO_1A jest trójkątem prostokątnym – *3 punkty*.

4. Wyznaczenie promienia kuli z twierdzenia Pitagorasa

$$|OA| = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26\text{cm}$$

– *4 punkty*.