WMiI
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Kuratorium Oświaty w Olsztynie

Wojewódzki Konkurs Matematyczny

dla uczniów gimnazjów. Etap Szkolny

16 listopada 2018

Rozwiązania i punktacja

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 10. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi jedną poprawną odpowiedź. W przypadku pomyłki na karcie odpowiedzi należy wypełnić następny diagram z odpowiedziami. Diagramy z niepoprawnymi odpowiedziami powinny zostać przekreślone wzdłuż przekątnych. Zaznaczenie więcej niż jednej odpowiedzi w jednym zadaniu jest równoznaczne z niepoprawną odpowiedzią.

Zadanie 1. (*1 punkt*) Właściciel sklepu kupił w hurtowni a sztuk jednakowych czekolad po b zł za sztukę. Na sprzedaży wszystkich zarobił c złotych. Ile złotych kosztowała w jego sklepie tabliczka czekolady:

A $\boxed{\frac{a\cdot b+c}{a}}$ **B** $\frac{c}{a}$ **C** $\frac{c-a\cdot b}{a}$ **D** $\frac{c-a\cdot b}{b}$ **E** $\frac{a}{c}$

Zadanie 2. (*1 punkt*) W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna ma długość $2+\sqrt{5}$. Obwód tego trójkąta wynosi

A $4+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{10}$ **B** $2+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{10}$ **C** $\boxed{2\cdot(2+\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{10}}$
D $2+\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{10}$ **E** $4+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

Zadanie 3. (*1 punkt*) Dla ilu liczb całkowitych n wyrażenie $\frac{9}{n-5}$ przyjmuje wartość całkowitą?

A dla jednej **B** dla trzech **C** dla czterech **D** dla pięciu **E** $\boxed{\text{dla sześciu}}$

Zadanie 4. (*1 punkt*) Mediana zestawu następujących danych $2^5,\ 3^4,\ 4^3,\ 5^2,\ 6^1$ jest równa:

A $\boxed{32}$ **B** 45 **C** 27 **D** $41,6$ **E** 64

Zadanie 5. (*1 punkt*) Nikodem ma 1 zł 10 gr w czterech monetach. Wśród tych monet jest na pewno moneta:

A 5 gr **B** 10 gr **C** 20 gr **D** $\boxed{\text{50 gr}}$ **E** 1 zł

Zadanie 6. (*1 punkt*) W klasie III jest o 50% więcej chłopców niż dziewcząt. W klasie III jest:

A 21 dzieci **B** 32 dzieci **C** $\boxed{\text{25 dzieci}}$ **D** 27 dzieci **E** 18 dzieci

Zadanie 7. (*1 punkt*) Układ równań $\begin{cases} 2x- & y & = & 6 \\ -4x+ & 2y & = & -12 \end{cases}$

A ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 1, y = -4$

B ma dokładnie dwa rozwiązania $x = 1, y = -4$ oraz $x = 2, y = -2$

C nie ma rozwiązań

D $\boxed{\text{ma nieskończewnie wiele rozwiązań}}$

E odpowiedzi **A,B,C,D** nie są poprawne

Zadanie 8. (*1 punkt*) Wartość ułamka łańcuchowego

$$1\frac{1}{2} + \frac{1}{1\frac{1}{2} + \frac{1}{1\frac{1}{2} + \frac{1}{1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}}$$

wynosi

A $\boxed{2}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{3}{2}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** 4

Zadanie 9. (*1 punkt*) Liczba 0 jest rozwiązaniem jednego z równań:

A $3x^2 + 5 = 2$ **B** $4x^3 + x - 4 = 5$ **C** $\boxed{4^{x^2+1} = 2^{2(x+1)}}$
D $\frac{2x+2}{3x^2} = 2$ **E** $(x - 4)^2 = 10$

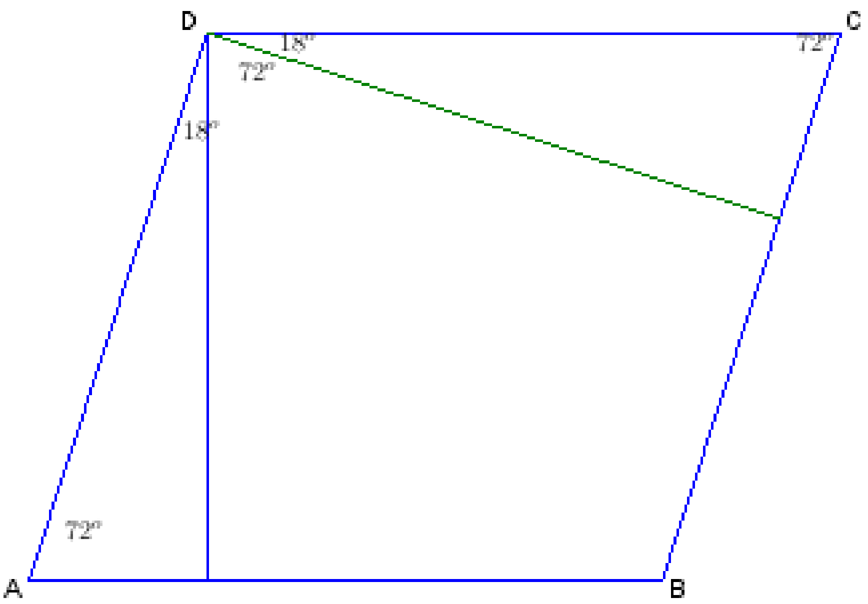
Zadanie 10. (*1 punkt*) Ile różnych trójkątów można zbudować z odcinków o długościach: 3 cm, 6 cm, 9 cm, 303 cm, 306 cm, 309 cm, 369 cm?

A 6 **B** 7 **C** 8 **D** $\boxed{9}$ **E** 10

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań od 11. do 15. należy zapisać w wyznaczonym miejscu pod ich treścią. W przypadku braku miejsca w na stronie z zadaniem, rozwiązanie można umieścić w brudnopisie lub na dodatkowych stronach, w takim przypadku należy na stronie z zadaniem umieścić odnośnik do zadania.

Zadanie 11. (*4 punkty*) Stosunek miar kątów równoległoboku jest równy 2 : 3. Znajdź miarę kąta między wysokościami równoległoboku wychodzącymi z wierzchołka kąta rozwartego tego równoległoboku. Wykonaj rysunek.



Rozwiązanie

Stosunek kątów wynosi 2:3 więc jeden z kątów można przyjąć jako $2x$ drugi kąt natomiast jako $3x$. Suma tych kątów wynosi 180^o. Wynika z tego , że

$$2x + 3x = 180^o$$

stąd

$$x = 36^o$$

Kąt przy wierzchołku A jest równy 72^0 przy wierzchołku B jest równy 108^o. Kąt między bokiem AB i wysokością oraz kąt między bokiem DC i drugą wysokością wynoszą 18^o. Kąt między wysokościami wychodzącymi z wiechołka D

$$108^o - 18^o - 18^0 = 72^o$$

Punktacja

- poprawny rysunek - *1 punkt*
- wyznaczenie kątów równoległoboku - *1 punkt*
- wyznaczenie kątów międxy bokami i wysokościami - *1 punkt*
- wyznaczenie kąta między wysokościami - *1 punkt*

Zadanie 12. (*4 punkty*) Stosunek dwóch liczb naturalnych jest równy 8 : 5: Większa z tych liczb podzielona przez mniejszą daje resztę 45. Jakie to liczby?

Rozwiązanie

Stosunek kątów wynosi 8:5 więc jako jedną z liczb można przyjąć jako $8x$ drugą z liczb natomiast jako $5x$. Iloraz tych liczb wynosi 1 plus reszta $3x$. Reszta z dzielenia wynosi 45 więc:

$$3x = 45$$

Stąd $x = 15$
Szukane liczby to

$$8 \cdot 15 = 120 \qquad \text{i} \qquad 5 \cdot 15 = 75$$

Punktacja

- oznaczenie liczb jako $8x$ i $5x$ - *1 punkt*
- obliczenie reszty - *1 punkt*
- wyznaczenie wartości x - *1 punkt*
- wyznaczenie szukanych liczb - *1 punkt*

Zadanie 13. (*4 punkty*) Z Olsztyna o godz. 7.00 wyjechał Pan A i jedzie do Elbląga z prędkością 60 km/h, natomiast z Elbląga o tej samej godzinie wyjechał Pan B i jedzie do Olsztyna z prędkością 40 km/h. Panowie A i B wyminęli się na drodze po jednej godzinie jazdy. Po załatwieniu spraw w miastach docelowych, co zajęło każdemu z nich jedną godzinę, Panowie A i B wracają do swoich miast. O której godzinie i w jakiej odległości od Olsztyna Panowie A i B wyminą się podczas powrotu?

Rozwiązanie

Po godzinie jazdy Pan A przejedzie 60 km a Pan B 40 km. Łącznie przejadą 100 km, a więc odległość między Ollsztynem i Elblagiem wynosi 100 km. Pokonanie odległości 100 km zajmie Panu A 1 godznę i 40 minut, tak więc Pan A będzie w Elblągu o godzinie 8.40 Pan B pokona odległość 100 km w ciągu 2 godzin i 30 minut, więc będzie w Olsztynie o godzinie 9.30 . Pan A wyjedzie z Elbląga w drogę powrotną o godzinie 9.40 natomiast Pan B o godzinie 10.30. Do momentu wyjazdu Pana B z Olsztyna Pan A w drodze do Olsztyna jadąc z prędkością 60 km/h przez 50 minut pokona odległość 50 km. Odległość dzieląca Panów A i B w chwili wyjazdu Pana B z Olsztyna jest równa 100km - 50 km=50 km. Odległość pokonywana przez Panów A i B w tym samym czasie pozostają w stosunku 3:2, więc Pan A do momentu spotkania pokona 30km z dzielącej ich odległości , natomiast Pan B pokona 20 km. Tak więc Panowie A i B spotkają się w odległości 20 km od Olsztyna. Pan B do momentu mijania się z Panem A przejedzie 20 km co zajmie mu 30 minut. Tak więc Panowie spotkają się o godzinie 11.00 .

Punktacja

- wyznaczenie odległości między miastami - *1 punkt*
- wyznaczenie czasu wyjazdu powrotnego panów A i B - *1 punkt*
- wyznaczenie odległości od Olsztyna przy ponownym wymijaniu - *1 punkt*
- wyznaczenie czasu wymijania panów A i B w drodze powrotnej. - *1 punkt*

Zadanie 14. (*4 punkty*)Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 9 i po przestawieniu jej cyfr otrzymać liczbę większą od połowy szukanej liczby. Podaj wszystkie możliwe liczby.

Rozwiązanie

Oznaczając przez x cyfrę dziesiątek szukanej liczby. Szukana liczba ma wówczas postać

$$10x + 9 - x$$

Liczba po zamianie cyfr ma postać

$$(9 - x)10 + x$$

Z warunków zadania wynika nierówność

$$(9 - x)10 + x > \frac{1}{2}(10x + 9 - x)$$

Po przekształceniu

$$90 - 9x > \frac{1}{2}(9x + 9)$$

po podzieleniu przez 9

$$10 - x > \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$3x < 19$$

Rozwiązaniem tej nierówności są liczby całkowite $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Szukane liczby dwucyfrowe: 18, 27, 36, 45, 54, 63

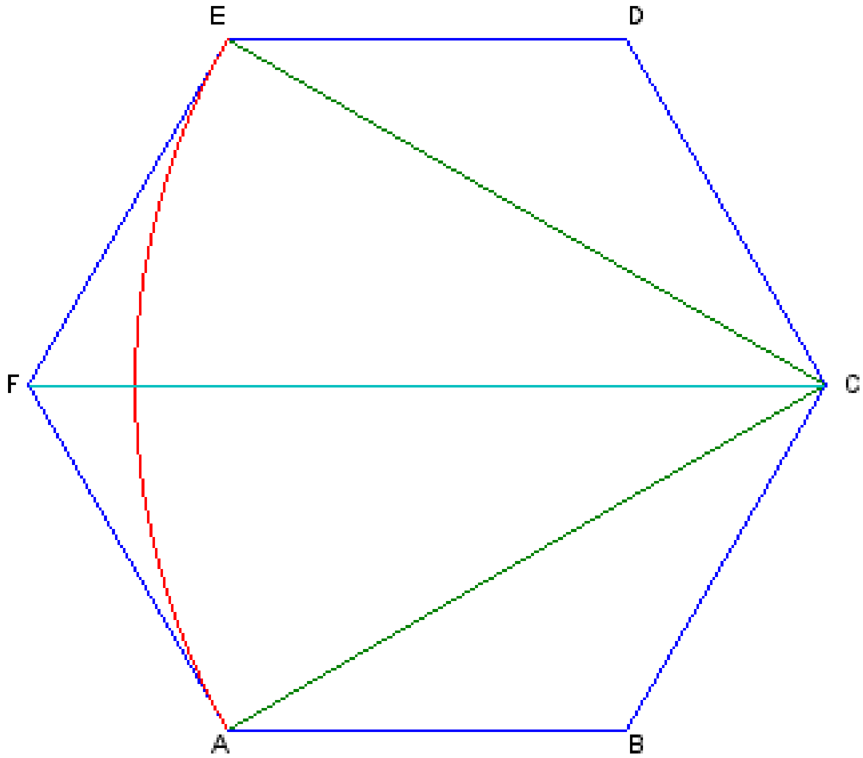
Punktacja

- przyjęcie odpowiednich oznaczeń i warunków zgodnych z treścią zadania - *1 punkt*
- ułożenie odpowiedniej nierówności,spełniającej warunki zadania - *1 punkt*
- poprawne rozwiązanie nierówności - *1 punkt*
- podanie wszystkich liczb spełniających daną nierówność - *1 punkt*

Możliwe są inne sposoby rozwiązania np. poprzez sprawdzenie które z liczb 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 spełniają warunki zadania. W tym przypadku proszę o punktowanie zadania proporcjonalnie do znalezionych rozwiązań.

Zadanie 15. (*4 punkty*) Łąka ma kształt sześciokąta foremnego o długości boku równej 20 m. W jednym z rogów łąki (wierzchołków sześciokąta) przywiązana jest koza na łańcuchu o długości $20\sqrt{3}$ m. Po 487 dniach koza zjadla całą dostępną trawę, więc gospodarz odwiązał kozę. Na ile całych dni wystarczy kozie trawy na pozostałej części łąki? Wykonaj rysunek.

Rozwiązanie



Dlugośćć łańcucha $20\sqrt{3}$ m jest równa odległości wierzchołków C i E (w trójkącie CEF przeciwprostokątna CF jest równa 40 m przyprostokątna EF 20 m więc druga przyprostokątna jest równa $20\sqrt{3}$ m).
Pole czworokąta ACEF jest równe:

$$P_{ACEF} = 2 \cdot \frac{20 \cdot 20\sqrt{3}}{2} = 400\sqrt{3} = 692$$

Pole wycinka koła CAE:

$$P_{CAE} = \frac{1}{6}\pi(20\sqrt{3})^2 = 200\pi = 628$$

Pole łąki nie będącej w zasięgu kozy jest równe:

$$P_{AFE} = P_{ACEF} - P_{CAE} = 692 - 628 = 64$$

Całkowite pole łąki (sześciokąt $ABCDEF$)

$$P_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3} = 1038$$

Pole łąki dostępne dla kozy

$$P = P_{ABCDEF} - P_{AFE} = 1038 - 64 = 974$$

Dziennie koza zjada

$$\frac{974}{487} = 2$$

Po odwiązaniu kozy zostanie trawy na

$$\frac{64}{2} = 32 \text{ dni}$$

Punktacja

- wykonanie rysunku - *1 punkt*
- wyznaczenie pola będącego w zasięgu kozy - *1 punkt*
- wyznaczenie pozostałego - *1 punkt*
- obliczenie liczby dni po odwiązaniu - *1 punkt*

Przy niepoprawnym rysunku (niedopasowanie długości łańcucha) można inne kroki ocenić pozytywnie.